

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 23

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $40 : 4 - 4 \cdot 2$ este egal cu
- 5p 2. Dacă $\frac{2x-1}{3} = 5$, atunci numărul x este egal cu
- 5p 3. Suma numerelor naturale din intervalul $[-2, 2]$ este egală cu
- 5p 4. Dacă unghiurile ABC și DEF sunt complementare și $m(\angle ABC) = 45^\circ$, atunci măsura unghiului DEF este egală cu ... $^\circ$.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Lungimea muchiei AB este egală cu 10 cm. Lungimea muchiei AA' este egală cu ... cm.

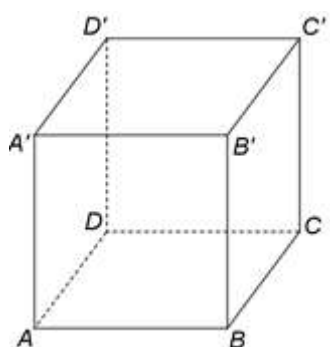
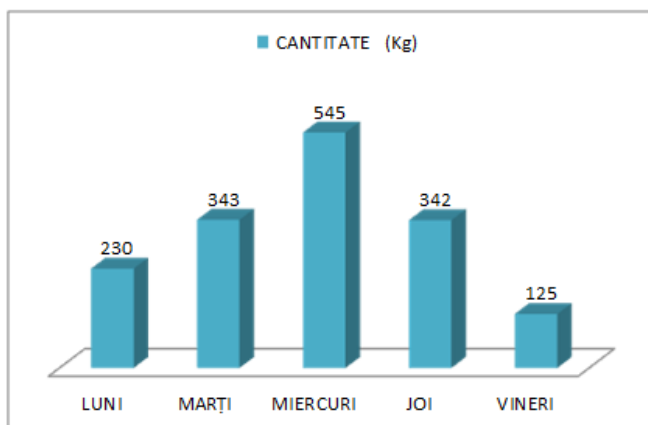


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare sunt prezentate informații despre cantitățile de fructe vândute, în kilograme, înregistrate în zilele unei săptămâni, la un supermarket.



Conform informațiilor din diagramă, media cantităților de fructe vândute în acea săptămână este egală cu ... kg.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul ABC .
- 5p 2. Arătați că media aritmetică a numerelor reale $x = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{7}{12}$ și $y = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4}$ este egală cu 2.
- 5p 3. Mai multe persoane vor să cumpere împreună un cadou. Dacă fiecare persoană contribuie cu câte 25 de lei mai este nevoie de încă 50 de lei, iar dacă fiecare persoană contribuie cu câte 35 de lei vor fi în plus 40 de lei. Determinați numărul de persoane care contribuie la cumpărarea cadoului.

4. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \leq x \leq |1-\sqrt{2}|+1-\sqrt{2}\right\}$.

5p a) Arătați că $A = \{-4, -1, 0, 3\}$.

5p b) Determinați elementele mulțimii $A \cap B$.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (x+2)^2 - (x-1)^2 - 2(x+3) - 5$, unde x este număr real. Determinați numerele naturale n pentru care $0 < E(n) \leq 11$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un romb $ABCD$ cu $AC = 8\text{cm}$ și $BD = 6\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB , punctul N este mijlocul segmentului BC și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD .

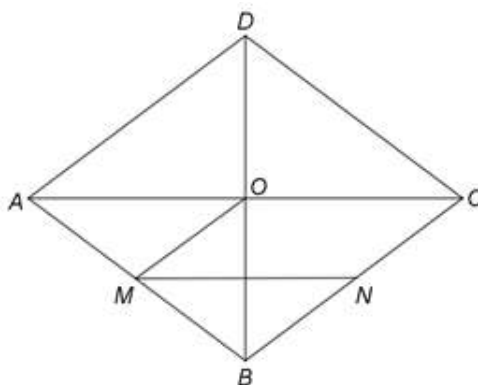


Figura 2

5p a) Arătați că $AB = 5\text{cm}$.

5p b) Demonstrați că unghiurile OMN și BAC sunt congruente.

5p c) Demonstrați că punctul O este centrul de greutate al triunghiului DMN .

2. În *Figura 3* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 12\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ și $AA' = 12\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB .

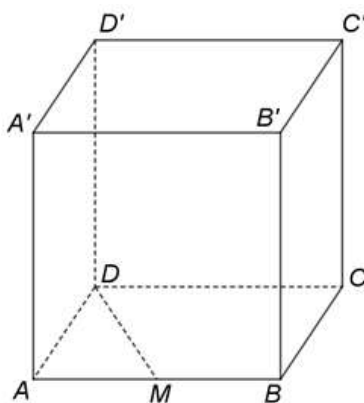


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABB'A'$ este egală cu 144cm^2 .

5p b) Determinați distanța de la punctul A' la dreapta DM .

5p c) Determinați măsura unghiului dreptelor DM și BN , unde N este mijlocul segmentului CC' .

TESTUL 23: - REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $40:4 - 4 \cdot 2 = 10 - 8 = 2$;

2) $\frac{2x-1}{3} = 5 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 2x-1 = 15 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$.

3) In $[-2; 2]$ nr. naturale sunt 0; 1 și 2; $0+1+2 = 3$.

4) $\widehat{ABC}$ și $\widehat{DEF}$: complementare $\Rightarrow$ au suma măsurilor egală cu 90° .
 $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ \Rightarrow m(\widehat{DEF}) = 90^\circ - m(\widehat{ABC}) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

5) Muchiile unui cub sunt congruente. $AA' = AB = 10$ cm.

6) $m = \frac{230 + 243 + 545 + 342 + 125}{5} = \frac{1585}{5} = 317$ (kg.)

SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $x = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{7}{12} =$

$= \frac{4+2+1}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{7} = 3$, deci $x = 3$.

$y = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4} = \frac{4-2-1}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$, deci $y = 1$.

$m_a(x; y) = \frac{x+y}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, deci media aritmetică a numerelor x și y este egală cu 2, 2.e.d.

3) Notăm cu x numărul de persoane și cu p prețul obiectului.

Avem:
$$\begin{cases} x \cdot 25 = p - 50 \\ x \cdot 35 = p + 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x - p = -50 \quad | \cdot (-1) \\ 35x - p = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -25x + p = 50 \\ 35x - p = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 35 \cdot 9 - p = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ p = 315 - 40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{10x}{10x} = 90 \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 90 : 10 \\ x &= 9 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ p = 275 \end{cases} \text{ R: Nr. persoanelor este 9.}$$

4) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$

a) $\frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x+1 \in D_7 = \{-7; -1; 1; 7\}$

$2x+1 = -7 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$

$2x+1 = -1 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

$2x+1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$2x+1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

$\Rightarrow A = \{-4; -1; 0; 3\}$, 2.e.d.

b) $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$;

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$ pt. că $1-\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2}$ (A).

$$\text{Deci } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 0\}$$

$$|1 - \sqrt{2}| + 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 + 1 - \sqrt{2} = 0$$

$$B = [-2; 0] \cap \mathbb{Z} = \{-2; -1; 0\}.$$

$$A \cap B = \{-4; -1; 0; 3\} \cap \{-2; -1; 0\} = \{-1; 0\}.$$

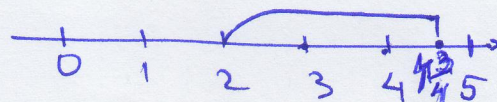
$$\begin{aligned} 5). E(x) &= (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1) - (2x + 6) - 5 = \\ &= \cancel{x^2} + 4x + 4 - \cancel{x^2} + 2x - 1 - 2x - 6 - 5 = \\ &= 4x - 8. \text{ Deci } E(x) = 4x - 8 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$E(n) = 4n - 8, n \in \mathbb{N}.$$

$$0 < E(n) \leq 11 \Leftrightarrow 0 < 4n - 8 \leq 11 \mid +8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 < 4n \leq 19 \mid :4 \Leftrightarrow 2 < n \leq \frac{19}{4} \Leftrightarrow 2 < n \leq 4\frac{3}{4}$$

$$n \in (2; 4\frac{3}{4}] \cap \mathbb{N}.$$

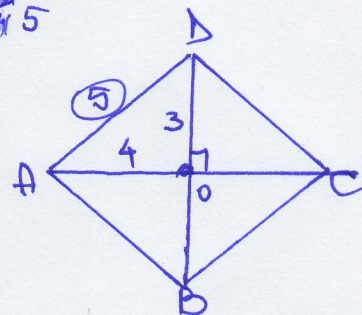


$$\text{Deci } n \in \{3; 4\}.$$

SUBIECTUL al III-lea: 1) $AC = 8 \text{ cm} \Rightarrow$

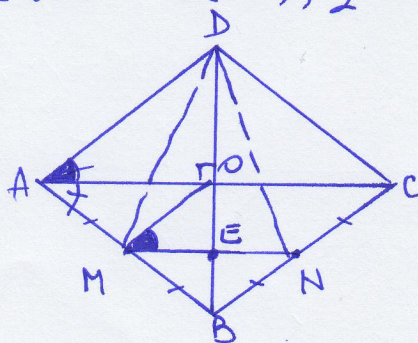
a) Diagonalele unui romb sunt perpendiculare și se înjumătățesc

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow AO = OC = 4 \text{ cm.} \\ BD = 6 \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow BO = OD = 3 \text{ cm} \end{cases}$$



Deci $\triangle AOD$: dreptunghiuc; $AD^2 = AO^2 + OD^2$; $AD^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$;
 $AD = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm.)}$, 2. e. d.

b)



M: mijlocul lui $[AB]$ $\Rightarrow [MN]$: linie mijlocie în $\triangle ABC$
 N: mijlocul lui $[BC]$

$$\Downarrow$$

$$\underline{MN \parallel AC} \quad (1)$$

M: mijlocul lui $[AB]$ $\Rightarrow [MO]$: linie mijlocie în $\triangle BAD$
 O: mijlocul lui $[BD]$

$$\Downarrow$$

$$\underline{MO \parallel AD} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \widehat{OMN} \equiv \widehat{DAC} \quad (3)$ ca unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Dar $ABCD$: romb $\Rightarrow$ diagonalele sunt și bisectoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{BAC} \quad (4)$ Din (3) și (4) $\Rightarrow \widehat{OMN} \equiv \widehat{BAC}$, g. e. d.

c) $\triangle DAM \equiv \triangle DCN$ (L.U.L.) $\Rightarrow [DM] \equiv [DN] \Rightarrow \triangle DMN$: isoscel

$\{ [DA] \equiv [DC] \text{ : laturi ale rombului}$
 $\{ [AM] \equiv [CN] \text{ : jumătăți de laturi}$
 $\{ \angle DAM \equiv \angle DCN \text{ (opuse în romb)}$

$$DO \perp AC$$

$$HN \parallel AC \quad (1)$$

$$\Rightarrow DO \perp HN \Rightarrow DO$$

$$\Rightarrow DO$$

$$\Rightarrow \frac{DO}{DE} = \frac{2}{3} \quad (6)$$

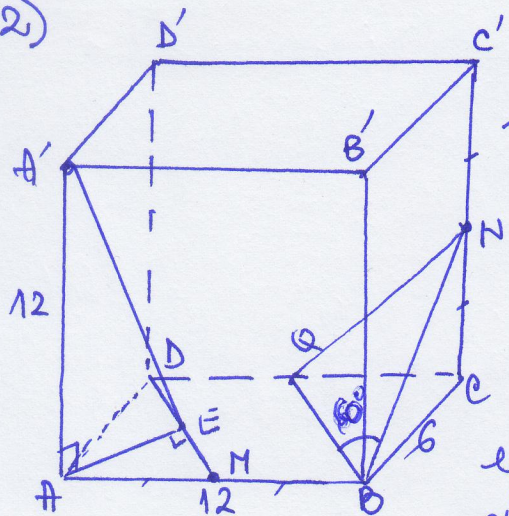
Din (5) și (6)
 Oe
 central
 de
 2
 p
 5 DMH

$\Rightarrow [DO]$: mediană

Notăm E: mijlocul lui $[MN]$

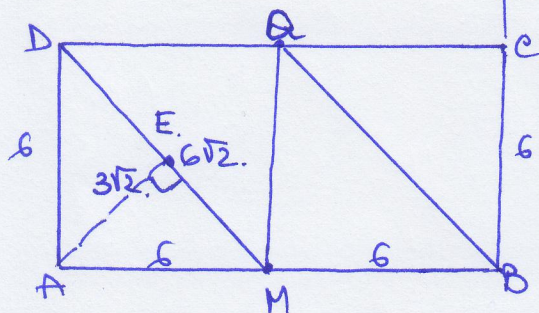
$MO \parallel AD$; $MO = \frac{AD}{2}$; $BN = \frac{BC}{2}$; $BN \parallel AD \Rightarrow MBNO$: romb $\Rightarrow BE = EO$

2)



a) $ABBA'$ este un pătrat deoarece, în general, fața unui paralelipiped dreptunghic este un dreptunghi, iar la noi în problemă $AB = AA' = 12 \text{ cm}$
 $A_{\square} = a^2$; $A_{ABBA'} = AB^2 = 12^2 = 12 \cdot 12 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$
 g.e.d.

b) Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendicularei dusă din punct pe dreaptă.



Notăm cu Q mijlocul lui $[CD]$. Avem

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

$$DQ = \frac{CD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

$$AD = 6 \text{ cm}$$

$\Rightarrow AMQD$: pătrat.

$$\Downarrow$$

$$DM = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

Ducem $AE \perp DM \Rightarrow AE = \frac{DM}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$
 $(\triangle AMD$: dreptunghic isoscel).

$$\left. \begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ AE \perp DM \end{array} \right\} \Rightarrow A'E \perp DM \text{ (T.3.1)} \Rightarrow d(A'; DM) = A'E$$

Cu T.P. în $\triangle A'AE$ dreptunghic în $A \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} (A'A \perp (ABC)) \\ AE \subset (ABC) \end{array} \right] \Rightarrow A'A \perp AE$$

$$\Rightarrow A'E^2 = A'A^2 + AE^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 144 + 18 \Rightarrow A'E = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Deci $d(A'; DM) = A'E = 9\sqrt{2} \text{ cm}$.

c) DM și BN sunt drepte necoplanare

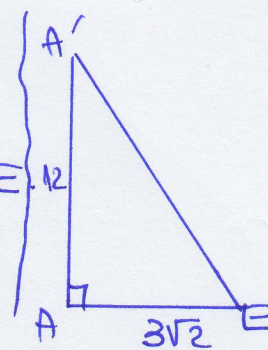
$$DQ \parallel MB; DQ = MB = 6 \text{ cm} \Rightarrow DMBQ \text{ : paralelogram} \Rightarrow DM \parallel BQ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{DM; BN}) = m(\widehat{BQ; BN}) = m(\widehat{NBQ}).$$

$$\left. \begin{array}{l} DM = 6\sqrt{2} \text{ cm}; \triangle CNB \text{ : dr. isoscel } (BC = CN = 6 \text{ cm}) \Rightarrow BN = 6\sqrt{2} \text{ cm}, \\ \triangle CNQ \text{ : dr. isoscel } (QC = CN = 6 \text{ cm}) \Rightarrow QN = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle NBQ \text{ : echilateral} \Rightarrow m(\widehat{NBQ}) = 60^\circ.$$

$$\text{Deci } m(\widehat{DM; BN}) = 60^\circ.$$



EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 23

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	2	5p
2.	8	5p
3.	3	5p
4.	45	5p
5.	10	5p
6.	317	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează prisma triunghiulară Notează prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul ABC	4p 1p
2.	$x = \frac{4+2+1}{4} : \frac{7}{12} = \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{7} = 3$ $y = \frac{4-2-1}{4} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow m_a = \frac{x+y}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$	2p 3p
3.	$25 \cdot n + 50 = 35 \cdot n - 40$, unde n este numărul de persoane $n = 9$	3p 2p
4.	a) $2x+1$ este divizor al lui 7, deci $2x+1 = -7 \Rightarrow x = -4$ sau $2x+1 = -1 \Rightarrow x = -1$ $2x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$ sau $2x+1 = 7 \Rightarrow x = 3$, deci $A = \{-4, -1, 0, 3\}$ b) $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \leq x \leq 1-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow 1-3 \leq x \leq \sqrt{2} - 1 + 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ și, cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $B = \{-2, -1, 0\}$ $A \cap B = \{-4, -1, 0, 3\} \cap \{-2, -1, 0\} = \{-1, 0\}$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 - 2x - 6 - 5 = 4x - 8$, pentru orice număr real x $0 < 4n - 8 \leq 11 \Leftrightarrow 8 < 4n \leq 19 \Leftrightarrow 2 < n \leq \frac{19}{4}$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$ sau $n = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $ABCD$ romb, deci $AO = \frac{AC}{2} = 4\text{cm}$, $BO = \frac{BD}{2} = 3\text{cm}$ și $AC \perp BD \Rightarrow \triangle AOB$ dreptunghic $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{16+9} = 5\text{cm}$	3p 2p
	b) $\triangle AOB$ este dreptunghic, M este mijlocul lui $AB \Rightarrow OM = AM$, deci $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle OAM$ M este mijlocul segmentului AB și N este mijlocul segmentului BC , deci MN este linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ și, cum $\sphericalangle OMN$ și $\sphericalangle AOM$ sunt alterne interne, obținem $\sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle AOM$, deci $\sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle BAC$	2p 3p

	c) $MN \parallel AC$, $BD \perp AC \Rightarrow DP \perp MN$, unde $\{P\} = BD \cap MN$ și, cum $\triangle ADM \equiv \triangle CDN$, deci $DM = DN$, obținem că DP este mediană în triunghiul isoscel DMN $MP \parallel AO$ și $BM = MA \Rightarrow MP$ linie mijlocie în $\triangle ABO$, deci P este mijlocul lui BO și, cum $BO = DO$, obținem că $OP = \frac{1}{3}DP$, deci O este centrul de greutate al triunghiului DMN	2p 3p
2.	a) $\mathcal{A}_{ABB'A'} = AB \cdot AA' =$ $= 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$ b) M este mijlocul segmentului AB, deci $AM = 6 \text{ cm} \Rightarrow \triangle ADM$ este dreptunghic isoscel, deci $DM = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ și $AE = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, unde $AE \perp DM$, $E \in DM$ $A'A \perp (ABC)$, $AE \perp DM$ și $DM \subset (ABC) \Rightarrow A'E \perp DM$, deci $d(A', DM) = A'E$ și, cum $\triangle A'AE$ este dreptunghic în A, obținem $A'E = \sqrt{A'A^2 + AE^2} = \sqrt{144 + 18} = 9\sqrt{2} \text{ cm}$ c) $BM \parallel DP$ și $BM = DP \Rightarrow MBPD$ este paralelogram, unde P este mijlocul segmentului CD, deci $DM \parallel BP \Rightarrow m(\sphericalangle(DM, BN)) = m(\sphericalangle(BP, BN))$ $BP = DM = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, $\triangle BCN$ și $\triangle CPN$ sunt dreptunghice isoscele, deci $BN = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ și $PN = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, de unde obținem că $\triangle BNP$ este echilateral, deci $m(\sphericalangle(PBN)) = 60^\circ$	3p 2p 2p 3p 2p 3p